報告番号	※甲　　　第　　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題に対する発見的解法

氏　　名　田中　勇真

論　文　内　容　の　要　旨

本研究では頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題を扱う．頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題は，入力として有向グラフ $G=(V,E)$，根 $r\in V$，各辺の始点側と終点側の消費量 $t:E\to\mathbb{R}_+$ と $h:E\to\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ は非負実数の集合を表す)，および各頂点 $i\in V$ の容量 $b_i\in\mathbb{R}_+$ が与えられ，根 r に流入するような有向全域木の集合とそれらの木のパッキング回数を決定する問題である．このとき，全ての木をパッキングしたときの各頂点 $i\in V$ の合計資源消費量が頂点容量 b_i を超えないという制約のもとで，木の合計パッキング回数を最大化することを目的とする．

頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題の重要な応用の1つとしてセンサーネットワークがある．近年では，アドホックネットワークやセンサーネットワークに対する研究が盛んに行われている．その中に，端末やセンサーの情報を基地局に収集，もしくは基地局から端末やセンサーに命令を配送する操作が頻繁に行われることが想定されたモデルがある．ただし，情報を収集するための端末やセンサーにはバッテリーが使用されることが少なくないため，効率的な通信を実現するための通信トポロジを構築することが求められる．そのような限られたバッテリー容量を用いて，基地局への収集回数，あるいは基地局からの配送回数を最大化するような通信トポロジを構築する問題は総称してネットワークライフタイム問題と呼ばれる．ネットワークライフタイム問題の中にはグラフパッキング問題としてモデル化されているものが多数あり，頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題もそのようなモデルの1つして捉えることができる．

また，頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題は辺素有向全域木パッキング問題と呼ばれる古典的なグラフパッキング問題と強い関連があり，本研究では理論的な性質を証明するためにそれらの既存結果を用いている．辺素有向全域木パッキング問題は，(多重辺が許される) 有向グラフ $G=(V,E)$ と根 $r\in V$ が与えられたと

き, 根 r に流入するような有向全域木の集合を決定する問題である (根から流出する方向で定義されることも多いが, 等価な問題である). このとき, 全ての木をパッキングしたときに同じ辺を使用しないという制約のもとで, 木の合計パッキング回数を最大化することが目的である. この問題に対しては, 1973 年に Edmonds によって証明された最大最小定理を皮切りに, 多くの拡張や効率的なアルゴリズムが提案されている. さらに, 各辺に容量がついた辺容量制約付きの辺素有向全域木パッキング問題に対しても研究がなされており, 強多項式時間アルゴリズムが存在することが知られている.

頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題は強 NP 困難であることが証明されている. さらに, 各辺の消費量がユークリッド距離の関数で定義されるような実用的な問題例であっても, 一般的には強 NP 困難であることが示されており, 優れた発見的解法を開発する必要がある. そこで, 本研究では, 頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題に対して 2 つの発見的解法を提案する.

提案するアルゴリズムの 1 つ目は線形緩和に基づくアルゴリズムである. 線形緩和とは整数計画問題から整数制約を取り除くことであり, 線形緩和した問題を線形緩和問題と呼ぶ. 一般的に, 線形緩和問題は元の整数計画問題に比べて解きやすい問題となり, また, 元の問題に対する有効な情報 (例えば上界など) を得ることができる. 本研究で提案する線形緩和に基づくアルゴリズムは 2 段階で構成されている. 1 段階目ではパッキングするのに有効であると考えられる木の集合 T を生成する. 線形緩和問題に対して列生成法を適用し, 新たな木を生成して T に追加する操作を停止条件が満たされるまで繰り返す. その中で, これを実現するために解く必要のある価格付け問題が, 最小重み根指定有向全域木問題という古典的な問題と等価であることを示した. 2 段階目では, 1 段階目で生成した木集合 T の各要素に対してパッキングを行う回数を決定する. 線形緩和問題を解くときに得られた情報を用いて問題の実行可能解を生成し, 貪欲アルゴリズムで解の改善を行う. センサーネットワークに関する既存研究で使用されていたセンサー位置情報から生成した問題例と, ランダムに生成した問題例の 2 つに対して計算実験を行ったところ, 線形緩和に基づくアルゴリズムは既存アルゴリズムよりも良い解を得ることを観測した.

2 つ目はラグランジュ緩和に基づくアルゴリズムである. ラグランジュ緩和とは, 整数計画問題から一部の制約式を取り除き, それらの制約式を違反した量にラグランジュ乗数を乗じたものを目的関数に加える緩和法であり, ラグランジュ緩和した問題をラグランジュ緩和問題と呼ぶ. 線形緩和問題と同様に, ラグランジュ緩和問題は元の整数計画問題に比べて解きやすい問題となる. ラグランジュ緩和に基づくアルゴリズムの基本的な流れは線形緩和に基づくアルゴリズムと同様であり, 2 段階に分けて問題を解く. 1 段階目ではパッキングするのに有効であると考えられる木の集合 T を生成する. ラグランジュ緩和問題に対して列生成法を適用し, 停止条

件を満たすまで新たな木を生成およびTに追加することを繰り返す．このとき，ラグランジュ緩和問題に対する良いラグランジュ乗数を得るために劣勾配法を適用する．提案する劣勾配法には，使用する木を削減する方法や各反復における実際の計算量を削減する高速化手法を組み込んでいる．2段階目では，1段階目で生成した木集合Tの各要素に対してパッキングを行う回数を決定する．線形緩和に基づくアルゴリズムよって得られた実行可能解の質が良いことから，同様の方法でパッキング回数を決定する．センサーネットワークに関する既存研究で使用されていたセンサー位置情報から生成した問題例と，ランダムに生成した問題例の2つに対して実験を行ったところ，ラグランジュ緩和に基づくアルゴリズムは線形緩和に基づくアルゴリズムと比べて，同じ数の木を生成するのに要する計算時間が短いにも関わらず，より良い解を出力できることを示した．また，一部の問題例に対しては厳密な最適解を得ることができた．

本研究では，2つの発見的解法を提案するのに加えて，頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題に対する線形緩和に基づくアルゴリズムの近似精度について述べる．具体的には，線形緩和に基づくアルゴリズムの一般化された枠組みを与え，その枠組みに含まれる任意のアルゴリズムは，最適値が頂点数$|V|$のα倍$(\alpha > 1)$以上である問題例に対して$(1 - 1/\alpha)$近似アルゴリズムであることを示した．この結果より，本研究で提案した線形緩和に基づくアルゴリズムも，ある停止条件を満たせばそのような問題例に対して$(1 - 1/\alpha)$近似アルゴリズムであることを示した．また，頂点数$|V|$に対して最適値が$|V| - 3$以下である問題例の中に，上述の枠組みに含まれる線形緩和に基づくアルゴリズムの近似精度がいくらでも悪くなってしまう問題例が存在することを示した．

実際の応用においては，様々な付加的な制約が必要であることが少なくなく，本研究で与えた2つのアルゴリズムが直接適用できない問題が多数存在する．しかし，似通った構造を持つ問題であれば，それぞれの問題に特化したアルゴリズムを設計する上での指針や，内部で呼び出す部品として本研究の成果を活用することができる．また，本研究で与えた理論的な結果は，頂点容量制約付き有向全域木パッキング問題に対する興味深い知見を与えてくれる．これらの成果が，センサーネットワークに関する分野，グラフパッキングに関する分野，さらには最適化分野の発展に貢献できれば幸いである．