報告番号	※甲　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目	Minimal Cubature Formulae for Spherically Symmetric Integrals and Tight Euclidean Designs (球面対称性を持つ積分に対する最小求積公式とユークリッド空間上のタイトデザイン)
氏　　名	平尾　将剛

論　文　内　容　の　要　旨

n 次元ユークリッド空間上の領域とその領域上の測度が与えられたとして，多項式に対する積分を考える．次数 t までのすべての多項式の値を，有限個の点と各点における重みを定めてそこでの多項式の値の重み付き和で与える公式のことを次数 t の求積公式 (cubature formula) と呼ぶ．

求積公式は数値解析や代数的組合せ論の問題との関連から盛んに研究されている．近年，数理ファイナンスへの応用が Lyons-Victoir によって発見されたこともあり，その重要性が再認識されている．

計算理論の立場から考えると，求積公式を構成する点数はより少ない方が良い．一般に次数 t のある積分に対する求積公式を構成する点数の下界は，その積分を考える領域上に制限された高々次数 $[t/2]$ の多項式の張るベクトル空間の次元を用いて評価される ($[t/2]$ は $t/2$ を超えない最大の整数)．特に奇数次数の場合，領域と測度がともに原点における対称性を持つ積分に対して，Möller により最適な点数に関する下界が得られている．これら最適な下界を達成する求積公式を最小求積公式と言う．

応用上，多変数ガウス積分に対する最小求積公式の存在問題は重要である．そこで本論文ではガウス積分を含む，領域と測度がともに回転に対する不変性, すなわち，球面対称性を持つ積分に対して，その最小求積公式の存在問題を考察する．

直交多項式論を用いて最小求積公式を特徴付ける研究は古くから行われている．1 次元の場合，区間上の積分に対する最小求積公式はガウス型求積法として良く知られている．例えば，次数 $2e-1$ のガウス積分に対する最小求積公式を構成する点集合は，次数 e のラゲール多項式の零点集合と一致し，また各点に対する重みはラゲール多項式を用いて表される．

また多次元の場合においても，Radon の 2 次元における 7 点からなる次数 5 の最

小求積公式の発見を契機に，多変数直交多項式を用いた研究が盛んにされている．特に，Mysovskikh の研究はガウス型求積法を再生核の理論を用い一般次元化したものであり，多変数直交多項式の共通零点とその共通零点上での再生核の値を用い最小求積公式を特徴付ける．しかしながら，共通零点の情報を完全に把握することは難しく，最小求積公式の存在性については未だ多くのことが分かっていない．

一方，直交多項式論を用いた研究の流れとは独立に，球面上のデザインと呼ばれる単位球面上の積分に対する特別な求積公式が Delsarte ら代数的組合せ論の研究者によって研究されている．球面上のデザインにおいては，次数 t の最小求積公式を構成する点集合をタイト t-デザインであるという．タイトデザインは計算理論からだけではなく，球面上のコード理論においても性質の良い点の配置であることが知られている．また，タイトデザインの存在性は数論におけるレーマー予想などと密接に関係しており，盛んに研究されている．

球面上のデザインの概念を多重同心球面上へと自然に拡張した概念がユークリッド空間上のデザインである．球面上のデザインと同様にタイトデザインが考えられ，その研究は置換群を抽象化した概念であるコヒアラント配置の研究との関連などから盛んに行われている．

我々は球面対称性を持つ積分に対する求積公式は全てユークリッド空間上のデザインに帰着できることを示す．これにより，デザイン理論を求積公式の研究に持ち込むことが可能となる．本論文の主目的は求積公式の理論をデザイン理論に持ち込み，デザイン理論を進展させるのと同時に，そのデザイン理論を用い,，球面対称性を持つ積分に対する最小求積公式の存在問題を進展させることである．

本論文は6章と Appendix からなる．第2章では代数的組合せ理論における球面上のデザイン，ユークリッド空間上のデザインについて概説する．それらの基本的性質と既存の結果を述べるとともに，球面対称性を持つ積分に対する求積公式がユークリッド空間上のデザインに帰着できることを示す．さらに求積公式の理論を用い，ユークリッド空間上のデザインに対する点数の下からの最適な評価を与え，そのタイトデザインの点配置，重みに対する特徴付けを行う．

第3章では奇数次数の2変数ガウス積分に対する最小求積公式の存在問題について述べる．次数 $2e+1$ の最小求積公式を構成する点集合は少なくとも $[e/2]+1$ 重同心球面上に分布されなければならないことが分かる．そこで点集合が $[e/2]+1$ 球面上に分布されるものに限定して最小求積公式の存在問題を考察する．まず最小求積公式が配置される多重同心球面の半径を2乗したものの集合はラゲール多項式の零点集合と一致することを示す．次に各 t に対して，高々 $[t/4]+1$ 重同心球面に配置される2次元ユークリッド空間上のタイト t-デザインの点集合は原点を中心とする多重正多角形上に分布することを示す．

これらの結果を組合わせることにより，奇数次数の最小求積公式が存在するため

の必要条件として，ラゲール多項式の線形和の因数分解に関する条件を導き，$e \geq 3$ における次数 $2e+1$ 次の最小求積公式の非存在性を示す．このことは Verlinden-Cools, Cools-Schmid の一連の研究よる次数 $4k+1$ の最小求積公式の存在問題の一般化になっている．また，この必要条件を導く過程はガウス積分以外の球面対称性を持つ積分に対しても適用することができる．

第4章においては，はじめに Mysovskikh の再生核の理論とユークリッド空間上のデザイン理論を組み合わせることにより，次数 $4k+1$ の球面対称性を持つ積分に対する最小求積公式で原点を含むものは $k+1$ 重同心球面上に分布し，その重みは各同心球面毎に定数であることを示す．この特徴付けを用いて，次数5の最小求積公式の存在性は次数4の最小求積公式，球面上のタイト 4-, 5-デザインのそれと同値であることを示す．このことにより，7次元，23次元における非自明な次数5の最小求積公式が存在すること，並びに $(2m+1)^2-2, m \geq 1$ 次元以外では存在しないことが示される．

さらに次数9の最小求積公式の存在性について，先に示した特徴付けを用いるとともに，最小求積公式を構成する点集合は点から定まるベクトル間の内積で関係を定めたコヒアラント配置を付随しなければならないという組合せ論による結果を用いることにより，最小求積公式が存在するための必要条件を新たに与える．さらにこのことから，多変数ガウス積分や単位球上の積分などに対しては，2次元以上での最小求積公式の非存在を示す．

5章では4次元での3重同心球面上に配置されるユークリッド空間上のタイト 5-デザインを与える．特にこのデザインは，3次元以上で3重同心球面以上に配置されるユークリッド空間上の既知のタイトデザインの中で，コヒアラント配置を付随しない唯一の例である．2重同心球面上のユークリッド空間上のタイトデザインはコヒアラント配置を付随することが知られている．しかしながら，3重同心球面以上のユークリッド空間上のタイトデザインに対してその構造が常に付随しているかどうかは未解決であったが，我々の結果は否定的解決を与えたことになる．

6章では，本論文で提示した結果についてまとめるのと同時に今後の研究課題について述べる．Appendix において，多変数ガウス積分に対する最小求積公式と点の個数が下界より一点多い場合の求積公式を与える．さらに次数9の球面対称性を持つ積分に対する最小求積公式を特徴付けるために必要な次数4の修正再生核を与える．