学位報告

報告番号	※甲　　　第　　　号

主 論 文 の 要 旨

論文題目　グラフ彩色アルゴリズムに関する研究

氏　　名　　　和田　乃慧

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、グラフの点彩色問題と均等辺彩色問題に関するアルゴリズムを議論している。点彩色問題は有名なＮＰ困難問題の一つとして知られる問題であり、均等辺彩色問題は辺彩色問題の変形問題である。

点彩色問題とは、与えられたグラフ G=(V,E)(V は頂点集合、E は辺集合)に対して、辺の両端点には同じ色を塗らないという条件ですべての頂点を(最小色数で)彩色する問題である。この問題は一見単純そうにみえる問題であるが、最適解を求めることは難しい。実際、この問題は NP 困難問題であり、多項式オーダーの時間で最適解を求めることはできないと考えられている。そのため、大規模なグラフに対して最適解を求めることは実際上不可能である。一方、コンパイラにおけるレジスタ割当て問題、時間割作成問題、核分裂の物理シミュレーションにおける擬似乱数配置問題など点彩色問題として定式化できる問題は多い。一般にこれらの応用では最適解を求める必要はなく近似解が求まれば十分である。

NP 困難問題では、対象とする入力グラフに制限をつけると問題が易しくなる場合がある。そこで、入力グラフを k 色彩色可能 (k-colorable) グラフに限った場合を考える。しかし、この場合でも、k が 3 以上なら点彩色問題は NP 困難である。一方、近似アルゴリズムの設計の観点からは、k 色彩色可能グラフであるという条件は有効であり、それを用いて彩色問題について、様々な近似アルゴリズムが発表されている。本論文では、より少ない色数で k 色彩色可能グラフを彩色できるような条件について議論する。

均等辺彩色問題とは、与えられたグラフの辺に色を塗る問題で、各頂点において接続する辺の色はどの 2 色も本数の差が高々2 であるように、k 色の色を塗る問題である。この問題はコンピュータネットワークにおけるファイル転送

スケジューリングなどに応用がある。この問題は 1982 年に Hilton と de Werra によって紹介され、同時に任意のグラフの均等辺彩色が存在することも証明された。彼らの証明から、任意の多重グラフを $O(km^2)$ 時間で均等辺彩色するアルゴリズムが得られる。1995 年、中野らは新しいアルゴリズムを提案し、実行時間を $O(m^2/k+mn)$ に改良した。(m と n は与えられたグラフの辺数と頂点数、k は与えられた色数である。)本論文では、多重グラフを均等辺彩色する３種類のアルゴリズムを提案する。

本論文は次の６章から構成されている。

第１章は序論である。点彩色問題と均等辺彩色問題の背景と研究の目的について述べている。

第２章では点彩色問題に関する既存の結果を述べ、その上で、次のような関係があることを発見した。

定理：最大次数Δを持つ k 色彩色可能グラフを入力とし、与えられたグラフを $O(\Delta^{1-x/k})$ 色で彩色するアルゴリズム A が存在するなら、そのグラフを $O(n^{C_k})$ 色で彩色するアルゴリズム B を導出できる。ここで、C_k は、$k\geq3$ 且つ $2<x<3$ なら、$C_k\leq1-(x+0.928)/(k+1)$ である。

さらに、この結果を用いて既存の最新結果を改良できることも示した。即ち、最大次数Δをパラメータとして近似率のよいアルゴリズムを開発すれば、グラフ彩色アルゴリズムの近似率を改善できることを理論的に示した。

第３章では多重グラフを均等辺彩色するアルゴリズム BALCOL を提案している。BALCOL は *Balanced Coloring* の略で、多重グラフを $O(m^2/k)$ 時間で均等辺彩色する。得られる辺彩色は *balanced constraint*（任意の２色で塗られた辺数の差が高々1である）を満たす。まず、BALCOL はどの色の辺数も同じになるように初期辺彩色を行い、アルゴリズム CHKREC を呼び辺彩色を修正する。CHKREC は Check and Recoloring の略で、次のように辺の色を均等辺彩色に修正して行く。まず、均等辺彩色条件を満たさない頂点 u を見つける。u に接続する辺の本数が最大の色を α、最小の色を β とし、手続き RECOLOR を呼び出す。RECOLOR は Euler 閉路のテクニックを使い、色 α と β で構成したグラフをこの二色に対する均等辺彩色に塗り替える。この操作をグラフ全体の均等辺彩色が得られるまで繰り返す。その結果、CHKREC は均等辺彩色を出力する。CHKREC の実行時間は RECOLOR の実行時間と RECOLOR が呼び出される回数で決まる。そこで、まず、RECOLOR の実行時間は色 α と β で塗られた辺の本数の線形時間であることを示した。次に、RECOLOR が呼び出された回数を解析するため、あるポテンシャル関数を提案し、そのポテンシャルが RECOLOR が呼び出される毎に少なくとも 1 だけ減ることを示した。

第４章ではランダムアルゴリズム RANCOL を提案している。RANCOL は *random coloring* の略で、高い確率で多重グラフを $O(m^{3/2}n^{1/2}/k^{1/2})$ 時間で均等辺彩色し、かつ *balanced constraint* も満たす。RANCOL はランダムにほぼ平均の m/k 辺を選びひ

とつの色で塗るという手順で初期辺彩色を行い、次に、アルゴリズム CHKREC を呼び、辺彩色を修正する。このランダムな初期辺彩色では、どの色で塗られた辺の本数も $O(m/k)$ であり、ポテンシャルは最低 $1-1/c$ の確率で $O((kmn)^{1/2})$ であることを示した（ここで、$c>1$ は定数である。）。

第５章では再帰アルゴリズム RECCOL を提案している。RECCOL は *Recursive Coloring* の略である。このアルゴリズムは多重グラフを $O(mn\,log(m/(kn)+1))$ 時間で均等辺彩色し、同時に *balanced constraint* も満たす。まず、与えられたグラフの辺のサイズが $|E|\le k|V|$ なら、第３章で提案したアルゴリズム BALCOL で辺彩色する。$|E|>k|V|$ の場合は次の手順で処理する。辺集合Ｅを同じサイズの二つの集合に分割する。それぞれの辺集合で構成されるグラフに対して RECCOL を呼ぶ。得られた辺彩色をマージする。CHEREC を呼び出して辺彩色を修正する。このアルゴリズムの計算時間を解析するために、CHEREC が呼ばれる前の辺彩色について、どの色で塗られた辺の本数も $O(m/k)$ であり、ポテンシャルは $O(kn)$ であることを示した。

与えられた色数 k が定数の場合、既存のアルゴリズムと提案した BALCOL の実行時間は全て $O(m^2)$ になる。即ち、この場合には Hilton と de Werra の結果が最良である。RECCOL はその結果を越えた初めてのアルゴリズムである。たとえば、m/n が大きくなる場合（例えば：$m=n^\theta$、$\theta>1$）、RECCOL は従来のアルゴリズムと比較して本質的によい性能を示す。

第６章は本研究で得られた結果をまとめている。