報告番号	※甲　　第　　号

主　論　文　の　要　旨

論文題目　合成法及び有限群を用いて構成される組合せデザインについて

氏　　名　澤　正憲

論　文　内　容　の　要　旨

組合せデザインは, 組合せ論および統計学において主要な研究対象の1つであるのみならず, 符号理論や暗号の理論等の情報科学への応用が認識され, 近年盛んに研究されている. 本論文の主目的は, t-デザインと呼ばれる組合せデザインの特別なクラスに対して, 組合せ論的あるいは群論的な視点から新しい構成法を開発することによって, t-デザインの存在問題を解決し, 離散数学および情報科学の発展に貢献することである.

$t < k < v$ を満たす自然数 t, k, v, λ に対して, 有限集合 V(**点集合**) とその k-元部分集合族 $\mathcal{B}$(**ブロック集合**) との順序対 $\mathcal{D} = (V, \mathcal{B})$ に対して, V の任意の t-元部分集合がちょうど λ 個のブロックに出現するとき, t-デザインをなすといい, t-(v, k, λ) と表記する ($|V| = v$). k を**ブロックサイズ**といい, λ を**指数**と呼ぶ.

第1章では, デザイン理論への導入を行った. 1.1節では, それ以降の考察に先立ち, 基本的なデザイン理論の用語或いは語句を定義した. 続く1.2節から1.5節では, t-デザインに関する歴史と既存の結果, 或いはそれらが抱える問題点について明らかにした. まず, 1.2節では, t-デザインに関する基本的事実を紹介した. 1.3節, 1.4節では, 2-デザイン, 一般の t-デザインに関する構成法と存在結果について述べた. 1.5節では, 3章で扱う内容と密接な関係にある3-デザインの特別なクラスの存在結果について述べた. 1.6節では, 情報科学への応用として, 巡回群を自己同型群としてもつ t-デザインと光直交符号との関連性について紹介した.

第2章では, 2-デザインの構成法に言及した. そのために, まず既存の存在理論と構成法について説明する. t-(v, k, λ) の存在性は多重可移置換群の存在性と密接な関係にある. すなわち, ある有限集合 V に t-重可移 (或いは t-均質可移) に作用する有限群 G の存在を仮定すると, V の任意の k-元部分集合の G-軌道は常に t-デザインをなすことが Witt(1938) により示されている. 一方, $t = 2$ の場合, 2-重可移群

を仮定せず2-デザインをなす軌道を決定するために，**定差集合族**と呼ばれる手法がよく知られている．定差集合族においては頂点集合 V とその上に可移に作用する自己同型群 G 自身を同一視するため，定差集合族の手法はすべての群に対して適用されるという利点がある．これに対して，**再帰的構成法**では，ある性質を共有する複数のデザインの合成により新しいデザインを構成することができる．有限個の種となるデザインから新しいデザインの無限系列を得られることがこの手法の最大の利点である．2-デザインの研究に関しては，定差集合族及び再帰的構成法が充実しているため，多くの存在性に関する結果が得られている．Wilson(1971,1972) は有限体に対する定差集合族を決定し，PBD-construction と呼ばれる再帰的手法を組み合わせることによって，2-デザインの漸近的存在性を証明した．この研究以降，定差集合族と再帰的構成法に関するさらに多くの研究がなされてきた．特に，定差集合族の理論体系は初等的方法ではもはや新しい族を発見できないと思われる域まで発展した．より多くのデザインを構成するという動機から，本論文では，2-デザインの新しい再帰的構成法を開発した．$\ell \leq v/k$ を満たす自然数 ℓ, v, k, λ に対して，ℓ 個の 2-(v,k,λ) からなる集合 $\{\mathcal{D}_i \mid i \in [\ell]\}$ の結合行列 $\boldsymbol{N}_i$ が条件

- 任意の $i, j \in [\ell]$ に対して，ある自然数 λ' が存在し，$\boldsymbol{N}_i + \boldsymbol{N}_j$ が 2-$(v, 2k, \lambda')$ をなす

を満たす時，**ℓ-部分加法的である**という．ここで，$[\ell] = \{1, \ldots, \ell\}$ とする．特に $v = sk$ かつ $\ell = v$ の時，上の条件を満たす2-デザインの集合は加法的であるという．

2.1 節では，加法性に関する概念を導入し，また，Colbourn らによって導入された 2-$(v,3,1)$ に対する compatibility の概念との関連性について紹介した．2.2 節，2.3 節では，部分加法的デザインの基本的性質を明らかにした．また，加法性に関する概念が垂直配列及び入子デザインと呼ばれる組合せ論或いは統計学における古典的対象を統合する概念であることを明らかにした．2.4 節では，加法的なデザイン集合の無限系列を，特に有限アフィン幾何の初等的性質を用いて構成した．一般に自然数 $v \equiv 3 \pmod 6$ に対して，加法的 2-$(v,3,1)$ の集合は，Colbourn らにより compatible minimal partition と呼ばれている．同節で得られた 2-$(3^n,3,1)$(n は自然数) に対する加法的デザインの存在結果は，その無限系列を初めて与えたという点において重要である．2.5 節，2.6 節では，加法性に基づいた 2-デザインの再帰的構成法を提示した．特に 2.5 節では，分解可能な 2-デザインと部分加法的なデザインを組み合わせる手法を提示した．デザインが分解可能であるとは，そのブロック集合 $\mathcal{B}$ の分割 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ が存在し，各 $\mathcal{B}_i$ にすべての点がちょうど 1 回ずつ現れることをいう．ここで提示される構成法の根底にあるのは，分解可能な 2-デザインが与えられた時，各 $\mathcal{B}_i$ に属する適当なブロックの和をとりブロックサイズが大きい 2-デザインを構成するアイデアである．PBD-construction をはじめとする既存の再帰的手法が，得られたデザインのブロックサイズをもとのデザインのブロックサイ

ズ以下にするのに対して，我々の再帰的構成法は，得られたデザインのブロックサイズをもとのデザインのブロックサイズより大きくする手法であり，このような手法は本論文以外にはほとんど見られない．点集合の濃度が v，ブロックサイズが k となる 2-デザインの中で，指数が最小のデザインは**最小デザイン**と呼ばれる．上述の方法により多くの最小デザインが構成され，さらにこれまで存在の知られていなかった最小 2-デザインの無限系列が構成されることも明らかにした．一方，2.6 節で提示する再帰的構成法から得られたデザインは，上述の構成法と異なり，構成されたデザインの点の個数 v を種となるデザインよりも大きくする手法である．この場合にも，2.5 節で提示された構成法と同様に，種となるデザインよりブロックサイズの大きなデザインを生じ，多くの最小デザインを構成できることを明らかにした．

3 章では，3-デザインに関する群論的構成法を与える．よく知られているように，一般の t-重可移群はほとんど存在しないため，Witt の定理が応用可能な範囲は限られている．また，2 章の 2-デザインでは定差集合族と再帰的構成法の手法が重要な鍵となることを既に述べたが，一般の t に対して，それらに対応する強力な手法は知られていない．3.1 節では，この問題に対する部分的な解決として，位数 $v \equiv 2 \pmod 4$ の可換群 A に対して $A \rtimes \mathrm{Aut}(A)$ を自己同型群としてもつような単純 3-$(v, 4, 3)$ の存在性を証明した．この結果は，自然数 v に対する単純 3-デザインの無限系列が，2 次元射影線型群の 3-重可移性を利用して得られるもの以外ほとんど知られていないという点に鑑み，重要である．一般に有限群 G を点正則な自己同型群としてもつデザインは G-不変であると呼ばれ，特に巡回群で不変なデザインは巡回的であると呼ばれる．上述の結果から，可換群により不変な単純 3-$(v, 4, 3)$ の存在性が直ちに示され，それは Köhler による巡回的単純 3-$(v, 4, 3)$ の存在定理の一般化を与えている．本研究成果は，まず単純デザインをなす $\binom{A}{4}/A$ の部分集合の適当な選び方を見出し，ついで，その軌道の群論的な性質を定式化することによって，得られたデザインが実は A の holomorph を自己同型群としてもつと証明される，という過程で行われた．上述のデザインは，A 上の対合的置換 σ と A との半直積群 $\hat{A} = A \rtimes \langle \sigma \rangle$ に対して，

$$\mathrm{Orb}_A(B) = \mathrm{Orb}_{\hat{A}}(B)$$

を満たす A の 4-元部分集合 B(**対称 4-ブロック**) 全体によって生成されている．ブロック集合 $\mathcal{B}$ として対称 4-ブロックをとることによって得られた．続く 3.2 節，3.3 節では，対称ブロックのもつ基本的性質に基づいて **Köhler グラフ**と呼ばれるグラフを導入し，そのグラフにおける一因子の存在とある自己同型群をもつ 3-$(v, 4, 1)$ の存在の同値性を証明した．1985 年，Piotrowski は，2 面体群で不変な 3-$(v, 4, 1)$ が存在するための非自明な必要十分条件を導いた．本論文の結果は，対称ブロックによりデザイン理論とグラフ理論を関連付けるのみならず，Piotrowki の定理を 2 面体群ではなく一般の $\hat{A}$ へ拡張可能であること示している．3.4 節では，すべての $v \equiv 0$

(mod 4) に対して, Kleemann(1981) によって構成された巡回的 3-$(v, 4, 3)$ が**巡回的分解集合**をもつことを証明した. 巡回的分解集合をもつ t-デザインの存在問題は, Beutelspacher(1974) によって提示された幾何学的問題に起源を発する. 2-デザインに対しては多くの巡回的分解可能なデザインの存在結果が知られていたのに対して, $t \geq 3$ の場合には巡回的分解集合をもつ t-デザインの例は高々有限個しか知られていない. 一般にデザインの分解可能性を判定することは組合せ論的に難しい問題であるが, 対合的置換 σ により不変なブロックは通常のユークリッド空間の意味で幾何学的に解釈され扱いやすいという利点をもつ. 本節の結果は, 3-デザインの巡回的分解可能性を初めて示したという意味でこの分野の研究に先鞭を告げたといえる.

最後に, 3.5 節, 3.6 節では, それまでの節で得られた理論的な結果を光多重通信における光直交符号へ応用した. 光直交符号は, Chung ら (1989) によって導入されたが, その重要性が認識され, 現在多くの研究者によって研究されている. Fuji-Hara(2001) らは, 符号語数に関して最適な**光直交符号**と巡回的 t-デザインに近いある組合せ構造との同値性を示した. この結果を利用して, 3.5 節では, 最大衝突数 2 で重み 4 の**漸近的に最適**な光直交符号の存在性を証明した. また, 2-次元版の光直交通信方式も多くの研究者によって調べられている. Yang-Kwong ら (1995) は, Fuji-Hara ら同様に, 符号語数に関して**最適な** 2-次元光直交符号の存在と 2 つの巡回群の直積群で不変な t-デザインの存在との同値性を示した. 3.3 節の結果を $Z_v, Z_m \times Z_n (\simeq A)$ に対して適用することにより, 最大衝突数 2 で重み 4 の最適な光直交符号或いは最適な 2-次元光直交符号の無限系列を組織的かつ大量に構成した.