平 成 ２８ 年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

<u>専　　　　　門</u>

平成２８年２月８日（月）
１３：３０～１５：００

注 意 事 項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、英語で解答してもよい。さらに、日本語から母語への辞書１冊に限り使用してよい。電子辞書の持ち込みは認めない。

4．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙１枚が配布されていることを確認すること。

5．問題は線形代数、微分積分、離散数学の３問からなる。
このうち<u>**２問を選択して**</u>解答すること。
なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入すること。

ただし、<u>離散数学は選択問題であり、問題はIとIIからなる。</u>
<u>離散数学を選択する場合は、IまたはIIの一方のみを答えよ。</u>

6．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。
解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

8．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出すること。

9．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1. (線形代数)

θ を実数とし, $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ とする. 次の各問に答えよ.

(1) A の固有値 (eigenvalue) をすべて求めよ.

(2) A を対角化 (diagonalization) する直交行列 (orthogonal matrix) をひとつ求めよ.

問題 2. (微分積分)

以下の各問に答えよ.

(1) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 - y^2$ とする.

(i) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(1,-1)$ における接平面 (tangent plane) の方程式を求めよ.

(ii) 領域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ において $z = f(x,y)$ の最大・最小を求めよ.

(2) 不定積分 (indefinite integral)

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[5]{x-1}}$$

を求めよ.

問題 3.（離散数学）

離散数学は選択問題である．次の I, II の **いずれか一つを選択して** 答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ．

I.

以下の各問に答えよ．

(1) 非負整数（non-negative integers）$a \leq b$ に対して，

$$\sum_{i=a}^{b} \binom{i}{a} = \binom{b+1}{a+1}$$

を証明せよ．ただし，$\binom{i}{a}$ は二項係数（binomial coefficient）$\binom{i}{a} = \dfrac{i!}{a!(i-a)!}$ を表す．

(2) 非負整数 m，正整数（positive integer）n に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$$

をみたす n 項からなる非負整数の数列（non-negative integer sequence of n terms）$\{a_i\}$ は何通りあるか．

(3) 同様に

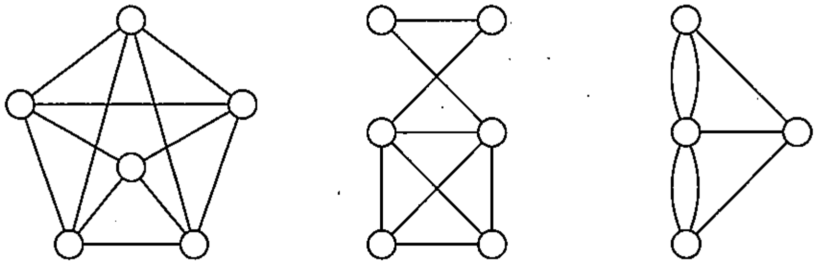
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq m$$

をみたす n 項からなる非負整数の数列 $\{a_i\}$ は何通りあるか．ただし，(1) の恒等式（identical equation）を用いて数え上げる方法と用いない方法をそれぞれ与えよ．

II.

V と E をそれぞれ頂点 (vertex) と辺 (edge) の集合とする無向グラフ (undirected graph) $G=(V,E)$ を考える ($|V|$ も $|E|$ も有限). G の頂点と辺が交互に現れる列 $v_0e_0v_1e_1v_2\cdots e_{k-1}v_k$ (ただし e_i の端点 (end vertices) は v_i と v_{i+1} ($\forall i\in\{1,2,\ldots,k-1\}$)) を路 (path) と言い, $v_k=v_0$ である路を閉路 (circuit) という. また, 同じ辺を2度以上通らない路および閉路をそれぞれ初等路 (elementary path), 初等閉路 (elementary circuit) という. グラフ G の各辺を丁度1回ずつ通る路をオイラー路 (Euler path), そのような閉路をオイラー閉路 (Euler circuit) という. なお, 初等路, 初等閉路, オイラー路, オイラー閉路はいずれも同じ頂点を2度以上通ってもかまわない. 以下の各問に答えよ.

(1) 以下の3つのグラフの各々に対してオイラー路あるいはオイラー閉路があればその1つを図示せよ. いずれも存在しない場合はその旨解答せよ (理由は述べなくてよい).



(2) $G=(V,E)$ が連結 (connected) であるとき以下の3条件が等価であることを示せ.

条件ア. G にオイラー閉路が存在する.

条件イ. G の各頂点の次数 (degree, すなわち頂点に接続する辺の数) は偶数 (even number) である.

条件ウ. G の辺集合は初等閉路に分解できる. すなわち, 辺集合 E のある分割 $E_1,E_2,\ldots,E_k$ ($E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_k=E$ かつ $E_i\cap E_j=\emptyset$ ($\forall i\neq j$)) が存在して, 各 $i=1,2,\ldots,k$ に対して E_i の全ての辺が1つの初等閉路に含まれる.

ヒント. 条件ア $\Longrightarrow$ 条件イ $\Longrightarrow$ 条件ウ $\Longrightarrow$ 条件アの順に示してみよ.

(3) 無向グラフ $G=(V,E)$ が連結であるとする.「G にオイラー路は存在するがオイラー閉路は存在しない」が成立するための必要十分条件を示せ. 理由も簡潔に示すこと (必要なら問2の結果を用いてよい).

ヒント. 問2の条件イのような次数に関する条件を考えよ.