平 成 ２３ 年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　門

平成２２年８月１０日（火）
１２：３０～１５：３０

注 意 事 項

１．試験開始の合図があるまでは，この問題冊子を開いてはならない.

２．試験終了まで退出できない.

３．外国人留学生は，英語で解答してもよい．さらに，電子辞書以外の辞書（１冊）を持ち込んでもよい.

４．問題冊子，解答用紙３枚，草稿用紙３枚が配布されていることを確認せよ.

５．問題は，線形代数，微分積分，離散数学，数理論理学，確率論，統計学，量子力学，アルゴリズム設計法，オートマトン理論，プログラミングの１０題からなる．このうち**３題を選択して**解答せよ.

選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ.

ただし，離散数学は選択問題であり，問題はIとIIからなる．この問題を選択する場合は，IまたはIIの一方のみを答えよ.

６．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ．解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない.

７．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出せよ.

８．問題冊子，草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい.

問題 1．(線形代数)
以下の各問に答えよ．

(1) 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は対角化可能であるか判定せよ．もし対角化可能ならば，変換行列 P と対角行列 $P^{-1}MP$ を求めよ．

(2) 実数係数の 1 変数多項式で，次数が n 次以下のもの全体の集合を P_n とする．P_n の内積

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \quad (f,g \in P_n)$$

によって，P_n の部分空間 $Q_n = \{f \in P_n \mid (x,f) = 0\}$ を定める．

(i) P_n の実数体 $\mathbb{R}$ 上の次元を求めよ．

(ii) Q_n の $\mathbb{R}$ 上の次元を求めよ．

(iii) $n = 3$ のとき，Q_3 の $\mathbb{R}$ 上の基底を一つ求めよ．

問題 2．(微分積分)
以下の各問に答えよ．

(1) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)$ とする．ただし，$a > 0$ とする．

(i) $z = f(x,y)$ の極値を求めよ．

(ii) 曲線 $f(x,y) = 0$ の概形を書け．

(iii) 曲線 $f(x,y) = 0$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

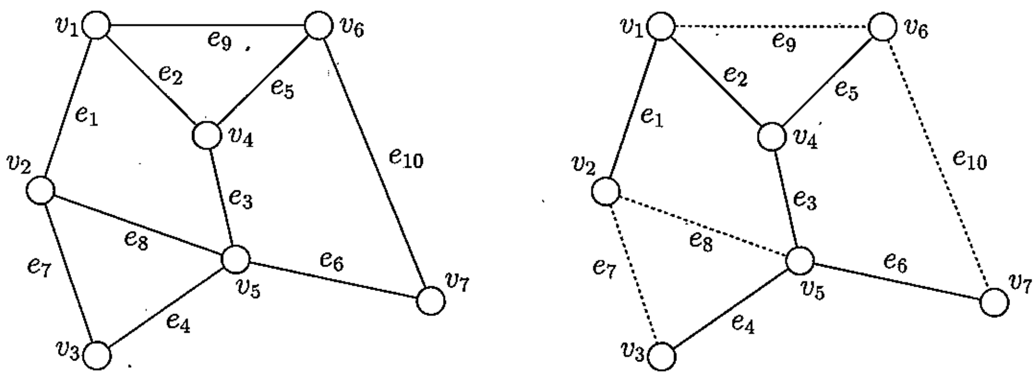
(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}dx$ は収束するか？

問題 3. (離散数学)

離散数学は選択問題である．次の **I**, **II** のいずれか**一方を選択して**答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきりわかるように記入せよ．

I. 頂点集合 V, 辺集合 E よりなる無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．G は自己ループも多重辺も持たないものとする．辺の部分集合 $T \subseteq E$ に対してグラフ (V,T) が閉路を持たず，連結であるとき，全域木 (spanning tree) であるという．以下の各問に答えよ．

(1) T に含まれない辺 $e \in E-T$ に対して，e を (V,T) に加えることでできる閉路を基本閉路と呼び，$C(e)$ と記す．たとえば，以下の左の図のグラフに対し，その右の図は実線を T の辺，破線をそれ以外として全域木を表しているが，このとき，$C(e_9)$ は辺 e_2, e_5, e_9 よりなる閉路である．これを $C(e_9)=e_2e_5e_9$ と記すことにする．



この図のグラフと全域木における $C(e_9)$ 以外の全ての基本閉路を書け．

(2) 全域木 (V,T) の辺数 $|T|$ は $|V|-1$ であることを証明せよ．

(3) グラフ (V,E) と全域木 (V,T) に対して基本閉路はいくつ存在するかを $|V|$ と $|E|$ を用いて答えよ．

(4) 各辺 $e \in E$ に重み $w(e)$ が与えられたとき，重みの総和 $\sum_{e \in T} w(e)$ が最小の全域木を最小全域木 (minimum spanning tree) という．以下の主張が正しいか否かを，理由とともに述べよ．

主張: (V,T) が最小全域木ならば，任意の $a \in E-T$ と $b \in C(a)$ に対して $w(b) \le w(a)$ が成り立つ．

II. 整数 a, b $(b \neq 0)$ を，整数 q, r を用いて

$$a = qb + r$$

と表す．以下の各問に答えよ．

(1) $(a, b) = (b, r)$ を証明せよ．ただし，(x, y) は整数 x, y の最大公約数を意味する．
(2) r にどのような条件を付ければ，上の操作の繰り返しで最大公約数が求まるか答えよ．
(3) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} + r\mathbb{Z}$ を証明せよ．ただし，$x\mathbb{Z}$ は整数 x の倍数全体の集合を意味し，$X, Y \subseteq \mathbb{Z}$ に対して，$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ とする．
(4) $(a, b) = d$ のとき，

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

を証明せよ．

問題 4.（数理論理学）

以下の各問に答えよ．

(1) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 上の述語論理式 (predicate formula) を考える．なお，原子論理式 (atomic formula) 中で使用してよい記号は，変数記号，定数記号としての $0, 1, 2, \ldots$，関数記号 $+, \times$，述語記号 $\leq, =$ のみであるとする．例えば,『x は y の倍数である』を意味する述語 multiple(x, y) は述語論理式 $\exists k(x = k \times y)$ で与えることができる．
以下の仕様を満たす述語論理式を与えよ．

(i) 『x は偶数である』を意味する述語 even(x) を与える述語論理式.

(ii) 『x は素数である』を意味する述語 prime(x) を与える述語論理式.

(iii) 『4 以上 x 以下の全ての偶数が 2 つの素数の和で表される』を意味する述語を与える述語論理式．なお，上で与えた even(x) と prime(x) を用いてもよい.

(2) 命題変数と論理結合子 $\neg, \wedge, \vee$ から生成される命題論理式 (propositional formula) を考える．否定標準形 (negation normal form) とは $\neg$ が命題変数のみにかかる命題論理式，すなわち次の文法により生成される命題論理式のことである．ここで，PV は命題変数を表すとする．

$$NNF ::= PV \mid \neg PV \mid NNF \wedge NNF \mid NNF \vee NNF$$

(i) $\neg(p \vee \neg(q \wedge \neg r))$ の否定標準形を求めよ．

(ii) 命題論理式を，その否定標準形に変換する関数 ϕ を以下のように与えていく．

$$\begin{cases} \phi(p) & = & p & \text{if } p \text{ は命題変数} \\ \phi(\neg p) & = & \neg p & \text{if } p \text{ は命題変数} \\ \phi(P_1 \wedge P_2) & = & \phi(P_1) \wedge \phi(P_2) & \\ & \vdots & & \end{cases}$$

この定義を完成せよ．

(iii) (ii) で定義した関数 ϕ が妥当であること，すなわち，任意の命題論理式 P に対し，$\phi(P)$ が P の否定標準形となっていることを帰納法で示せ．なお，何に関する帰納法を用いたかを明示せよ．また，帰納法の仮定を用いた個所も明示せよ．

問題 5．(確率論)

以下の各問に答えよ．

(1) 確率変数 X は正の実数 λ をパラメータに持つ指数分布に従うとする．すなわち，X は 1 次元の非負確率変数で，$0 \leqq a < b < \infty$ を満たす任意の実数 a, b に対して事象 $a \leqq X \leqq b$ の確率が

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx$$

を満たしているとする．このとき確率変数 $\sqrt{X}$ の確率密度関数を求めよ．

(2) n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立とし，各 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は正の実数 λ をパラメータに持つ指数分布に従うとする．このとき確率変数 $\max_{1 \leqq i \leqq n} \sqrt{X_i}$ の確率密度関数を求めよ．

(3) 確率変数 X が正の実数 λ をパラメータに持つ指数分布に従うとするとき，$\sqrt{X}$ の期待値と分散を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてもよい．

問題 6.（統計学）

$f(x)$ を区間 $[0,1]$ 上で定義された 1 変数関数とする．$p(x)$ を区間 $[0,1]$ 上の確率密度関数として，$x \in [0,1]$ に対して $p(x) > 0$ とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立な n 個の確率変数であり，それぞれ $p(x)$ を確率密度関数にもつ分布に従う．確率変数 Y を

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

とする．ただし Y の期待値と分散は存在すると仮定する．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) Y の期待値は，関数 $f(x)$ の積分値 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ に等しいことを示せ．

(2) Y の分散を $f(x)$, $p(x)$, n の式で表せ．

(3) 定数 θ を $\theta = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ と定める．ただし $0 < \theta < \infty$ とする．次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^1 \frac{|f(x)/\theta|^2}{p(x)}dx = \int_0^1 \frac{\big(|f(x)/\theta| - p(x)\big)^2}{p(x)}dx + 1.$$

(4) 区間 $[0,1]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & (0 \leqq x \leqq 1/2), \\ -x & (1/2 < x \leqq 1) \end{cases}$$

と定める．区間 $[0,1]$ 上で $p(x) > 0$ となる確率密度関数のなかで，Y の分散を最小にする確率密度関数を求めよ．

問題 7．(量子力学)

H を 2 次のエルミート行列とする．各成分が実数 t の複素数値微分可能関数であるような 2 次の列ベクトル $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ が H で定まるシュレーディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t)$$

の解ならば，$\psi_1(1) = \psi_2(0)$ 及び $\psi_2(1) = \psi_1(0)$ が成り立つとき，以下の各問に答えよ．

(1) H の固有ベクトルからなる正規直交基底を一つ求めよ．
(2) このような H をすべて求めよ．

問題 8. (アルゴリズム設計法)

以下の各問に答えよ.

(1) 配列の欠点は，プログラムの実行中にサイズを調整できないことである．サイズ n の配列の場合，$(n+1)$ 番目の要素にアクセスしたとたんプログラムは落ちてしまう．それを避けようとして極端に大きい配列を用意することもできるが，それは無駄な領域をつくってしまう．それで必要なときに配列を**拡張**することを考える．最初の配列はサイズが 1 とする．領域が足りなくなるたびにサイズを m から $2m$ に拡張する．配列の拡張は次のように行われる．サイズ $2m$ の連続したメモリー領域を新たな配列として確保し，古い配列の内容を新しい配列のはじめの半分に格納する．古い配列が使っていた領域はシステムに返す．このような仕組みは**動的配列**（dynamic array）と呼ばれる．プログラム終了時にサイズ n の配列を使っていたとして，次の問いに答えよ．

  (i) プログラム終了時までに配列の拡張は何回行われたか.

  (ii) k 回目の配列拡張でコピーされる配列要素数はいくらか.

  (iii) プログラム終了時までに配列拡張で発生する要素のコピーの総回数が $O(n)$ であることを示せ.

  (iv) 動的配列の欠点を述べよ.

(2) 任意の 2 頂点間に辺があるような無向グラフを完全グラフといい，完全グラフの各辺に任意に方向を与えてできる有向グラフを**トーナメント** (tournament) という．すべてのトーナメントはハミルトン有向路（directed Hamiltonian path），つまりすべての頂点をちょうど 1 回訪れる有向路を持つことを示せ．また，このパスを見つけるアルゴリズムを与えよ．その計算量を解析せよ.

問題 9. (オートマトン理論)

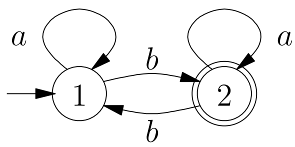
アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) aab を部分列に含む文字列全体からなる言語を，以下のそれぞれの形式で表せ．

- (i) 正規表現
- (ii) 決定性有限オートマトン (図示せよ)
- (iii) 正規文法 (もしくは文脈自由文法)

(2) 状態として，$1, \ldots, n$ を持つ決定性有限オートマトン A を考える．A の状態 i, j と整数 k $(0 \leq k \leq n)$ に対して，途中で k より大きな状態を経由しないで i から j に遷移可能な文字列全体を表す正規表現を $R_{ij}^{(k)}$ で表す．$k = 0$ のときは途中にどの状態も経由しない．

- (i) 以下の決定性有限オートマトンに対して，$R_{11}^{(0)}$, $R_{12}^{(0)}$ をそれぞれ示せ．



- (ii) $k > 0$ のとき，$R_{ij}^{(k)}$ を，$R_{ij}^{(k-1)}$, $R_{ik}^{(k-1)}$, $R_{kk}^{(k-1)}$, $R_{kj}^{(k-1)}$ を用いて表せ．

(3) 以下の補題は，正規言語の反復補題 (Pumping Lemma) として知られている．

> L を正規言語とするとき，ある自然数 n が存在して，$|w| \geq n$ なるどんな $w \in L$ についても次の条件をすべて満たす w の分解 $w = xyz$ がある．
> i. $y \neq \varepsilon$　ii. $|xy| \leq n$　iii. 任意の $k (\geq 0)$ について，$xy^kz \in L$

この補題を利用して．a と b が同数出現する文字列全体からなる言語 L が正規言語でないことを証明せよ．

問題 10. (プログラミング)

情報システム専攻のプログラミングの問題と同じ.